

# Interaktív matematika tanulás és tanítás a Műegyetemen

Illés Tibor

egyetemi docens, tanszékvezető

BME Differenciálegyenletek Tanszék

A BME Matematika



Wettl Ferenc



Fülöp Ottilia

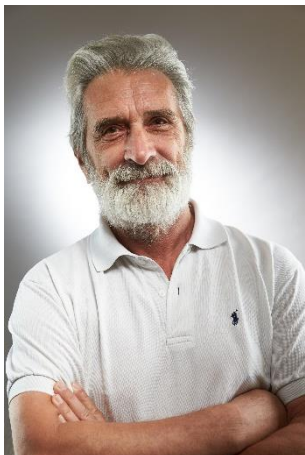


Szűcs Zoltán

Intézet munkatársai interaktív e-tananyagok, e-gyakorlófelületek fejlesztésébe kezdtek annak érdekében, hogy e modern eszközök alkalmazásával is hozzájáruljanak a matematikaoktatás színvonalának és eredményességének a növeléséhez a magyar felsőoktatásban. Az e-tananyagok, e-gyakorlófelületek kidolgozásánál fontos szempont volt a modularitás, így különböző célközönségek részére is alkalmas lehet az ismeretanyag. A modularitás megmutatkozik a matematikai területek értelemszerű szétválasztásában (*Lineáris algebra*, *Egy- és többváltozós függvények analízise*, *Vektoranalízis*, *Differenciálegyenletek*), ami akkor is hasznos, ha egyébként egy oktatott tárgyba különböző témák vannak összezsúfolva. Másrészt a modularitás azt is jelenti, hogy egy-egy tananyagban az ismeretek web-oldal méretű részekre vannak felosztva, és azok egy didaktikusan felépített struktúrában leckékbe vannak szervezve. Ez megkönnyíti az e-tananyag különféle kurzusokhoz való illesztését. Első

lépésként az alapvetően fontos matematikaterületek – nevezzük ezeket **matematika alap kurzusoknak (MAK)** – tananyagai készültek el: *Lineáris algebra* (szerző: Wettl Ferenc, lektor: Illés Tibor), *Egyváltozós valós függvények analízise* (szerzők: Fülöp Ottilia, Szűcs Zoltán, lektorok: Nágel Árpád, Nagy Katalin), *Többváltozós valós függvények analízise* (szerző: Barabás Béla, lektor: Nagy Katalin), *Vektoranalízis* (szerző: Nágel Árpád, lektor: Vrana Péter), *Differenciálegyenletek* (szerző: Kiss Márton, lektor: Nágel Árpád). A MAK projekt vezetője Illés Tibor, menedzsere Kiss Sándor, mindketten a BME Differenciálegyenletek Tanszék munkatársai. Gyakorló feladatok készítésében, gépelésében Varga Anita és Morapitiye Gábor Sunil a Differenciálegyenletek Tanszék, illetve Kiss Sándor az Algebra Tanszék munkatársa is részt vett. Az e-tananyagok, az ELMS Informatikai Zrt. elektronikus oktatási tartalomfejlesztési rendszerében készültek.

A világ vezető egyetemeinek gyakorlata és az egyetemokről kinőtt sikeres megoldások számtalan esetben azt igazolják, hogy a matematikát mechanikusan alkalmazható eljárások fekete dobozai halmazaként felfogó megközelítés helyett a matematika belső logikáját és az alkalmazott (műszaki, fizikai, közgazdasági,...) tudományok belső logikáját összehangoló megközelítés vezet az alkalmazásokban is jól használható, magas szintű tudáshoz. E tananyag elsődleges célja, hogy a matematika oldaláról hozzájáruljon e cél megvalósításához. E tananyag nagyban segíti a hallgatók önálló tanulását, ami reményeink szerint abban is segíthet, hogy a gyakran már értelmetlenül kicsire csökkentett óraszámok mellett is emelni lehessen az oktatás hatékonyságát.



Barabás Béla

1. A *Lineáris algebra* e-tananyag tartalmazza a főiskolai és egyetemi szintű mérnöki, közgazdasági, természettudományi és matematikus BSc képzések lineáris algebra anyagát, és egyes MSc képzések anyagának egy részét. Moduláris felépítésű, a kisebb anyagrészek és minden definíció, tétel, mintapélda, tesztkérdés, feladat saját címmel rendelkezik, aminek köszönhetően a tananyag harmadát vagy felét feldolgozó kurzusok is jól használhatják.

Az e-tananyag azzal a szándékkal készült, hogy a diákok számára a lineáris algebrát az alkalmazások által felvetett kérdések és a matematika belső logikája által motivált, logikusan egymásra épülő fogalmak, összefüggések és algoritmusok szervesen egymásra épülő rendszereként mutassa be. A bevezető fejezet elemi geometriai témái és a komplex számok tárgyalása gyakran más kurzusok részei, melyek a teljesség kedvéért itt is szerepelnek. A klasszikus bevezető témákon kívül bekerültek e tananyagba olyan témák, melyek az utóbbi két évtizedben váltak a nemzetközi standardok szerinti curriculumok részévé. Ilyen a mátrix kitüntetett altéréinek fogalma és a lineáris algebra alaptétele, a szinguláris érték és a szinguláris érték szerinti felbontás vagy a pszeudo inverz fogalma.



Nágel Árpád

A tananyag nem része a lineáris algebra algoritmusainak numerikus analízise, de érintjük a programcsomagok alapszintű használatához szükséges numerikus ismereteket, mindenekelőtt a mátrixfelbontásokat (például LU-, bázis-, saját-, QR-felbontás, SVD). A tananyagba került az ellentmondásos lineáris egyenletrendszerek optimális megoldásainak meghatározása, mely a mért adatokkal dolgozó alkalmazásokban nélkülözhetetlen. A tananyag által követett didaktikai elvek építenek a számítástechnikai rendszer által felkínált környezetre, így a lebomló módon megjelenő, kisebb lépésekre bontott, kérdésekkel segített tárgyalásmód, valamint a képleteket is elfogadó interaktivitás lehetőségeire. A tananyag jellemzője a fokozatosság, a középiskolai szintű lépésekkel induló tárgyalásmód az anyag végére tömörebb, egy második lineáris algebra kurzust jellemző absztrakciós szintre jut. Követve a Linear Algebra Curriculum Study Group kutatásainak eredményeire épülő ajánlásait a tárgyalás mátrix alapú. Az alkalmazások igen komoly motiváló erővé válhatnak, ezért az utolsó fejezetet teljesen ilyen témáknak szenteltük. Ezek a tananyag többi részével párhuzamosan is feldolgozhatók.



Kiss Márton

2. Az *Egyváltozós valós függvények analízise* tananyag lefedi mindazt az ismeretanyagot, amit a mérnök, közgazdász, vagy akár

fizikus hallgatók az egyváltozós valós függvények kapcsán tanulnak az egyetemi matematika alapképzésben.

A tananyag első fejezete (6 lecke) komoly alapozást nyújt az egyetemi oktatásba bekerülő hallgatóknak. Ezt további 8 fejezet követi: Numerikus sorozatok, Függvényhatárértékek, folytonosság, Differenciálszámítás, A differenciálszámítás alkalmazásai, Határozatlan integrál, Határozott integrál (Riemann-integrál), Az integrálszámítás alkalmazásai és Numerikus sorok és függvénysorok.

Olyan témákat is tartalmaz, melyek részletesebb kibontására, megbeszélésére az egyetemi órák alatt nincs mindig lehetőség, de amikre a kutató vénával megáldott hallgatóknak most, vagy a későbbiekben nagy szüksége lehet: például rövid bevezetést a mértékelméletbe, betekintést a szétválasztható elsőrendű közönséges differenciálegyenletek és a lineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenletek világába, érdekes Fourier-soros, hővezetési és hullámegyenlet feladatok részletes megoldásait, stb.

3. A *Többváltozós függvények analízise* e-tananyag tartalmazza azokat a klasszikus témaköröket, amelyek feltétlenül szükségesek az egyetemi szintű többváltozós függvényanalízis elsajátításához. A bevezetésben összefoglaljuk, definiáljuk azokat az alapfogalmakat, amelyek nélkülözhetetlenek a tananyag megértéséhez. Ezt követi a többváltozós függvények határértéke, folytonossága, differenciálszámítása, valamint a differenciálszámítás alkalmazásai (lokális és abszolút szélsőértékek, feltételes szélsőértékek kiszámítása).

A két- és háromváltozós függvények integrálszámítását, valamint ennek alkalmazásait tartalmazó fejezetek után az utolsó fejezetben a felületek számítógépes modellezésére kívánunk kis betekintést adni. Ez a fejezet értelemszerűen nem tartozik a klasszikus többváltozós függvények analízisébe, hiszen olyan eredményeket tartalmaz, amelyek a XX. század végén, a XXI. század elején jöttek létre. Az e-tananyag a modern technikai adottságaival (interaktív feladatok, animációk) nagyban segítheti a mérnöknek, közgazdásznak, informatikusnak vagy fizikusnak készülő egyetemi hallgatókat abban, hogy könnyebben elsajátíthassák a többváltozós függvények analízisével kapcsolatos definíciókat, tételeket és a rengeteg mintafeladaton és gyakorlófeladaton keresztül készségintű, alkalmazható tudásra tegyenek szert.

4. A *Vektoranalízis* e-tananyag 2 fejezetének 10 leckéje lefedi a főiskolai és egyetemi BSc kurzusok Vektoranalízis törzsanyagát. Törekedtünk arra, hogy a tananyagot felhasználó ennek segítségével készülni tudjon a megfelelő zárthelyi dolgozatokra és vizsgákra egyaránt, és visszajelzést kapjon arra vonatkozóan is, hogy mennyire mélyen sajátította el az anyagot, valamint hogy hol tart a tanulási folyamatban. Olvasóinkról feltételezzük az egy és többváltozós függvények analízisének és a vektoralgebrának az ismeretét.

A fejezetek előtt sok esetben motiváló példa, megjegyzés segíti a fogalmak precíz megértését. Az első fejezet általános vektor-vektor függvények folytonosságával, határérték számításával kezdődik. Mivel nagyon fontosak azok a vektor-vektor függvények, amelyek ugyan nem lineárisak, de lineáris vektor-vektor függvénnyel „jól” közelíthetők, ezért az ilyen tulajdonságú, azaz differenciálható vektormezőkkel is megismerkedünk.

Az alkalmazásokban igen fontos szerep jut differenciálható vektor-vektor függvény divergenciájának, illetve rotációjának. Ezeket a fogalmakat a folyamatosság elvét szem előtt

tartva, lineáris leképezés skalárinvariánsainak, illetve a vektorinvariánsának segítségével vezetjük be. Majd matematikai szabotossággal vezetjük be a görbe fogalmát, így előkészítjük a vonalintegrál fogalmát is. Szigorúan megkülönböztetjük a görbét definiáló leképezést és a görbét definiáló leképezés értékkészletét. Kiszámítjuk a „szép” görbék ívhosszát és ennek szemléletes jelentését is megismerjük. A fejezet végén a felület fogalmával ismerkedünk meg, ezzel előkészítve a felületi integrál fogalmát is.

A második fejezet a vonalintegrál tulajdonságaival kezdődik, a vonalintegrál matematikai és fizikai alkalmazásait is bemutatjuk. A felületi integrálokat fizikai példán, egy áramlástanai modellen vezetjük be, majd tárgyaljuk a potenciálemeléttel egyes kérdéseit. A fejezet végi 2 lecke a vektoranalízis két alaptézisével, a Gauss-Osztrogradszkij-tétellel és a Stokes-tétellel foglalkozik. A Gauss-Osztrogradszkij tételre teljes, míg a Stokes-tételre egy szép szemléletes bizonyítás adunk. Az anyag elméleti részeit sok mintafeladat, tesztfeladat és gyakorló feladat teszi teljessé és érthetővé.

5. A *Közönséges differenciálegyenletek* tananyag a stabilitásemélet kivételével lefedi mindazt az ismeretanyagot, amit a mérnök, közgazdász, vagy akár fizikus hallgatók tanulnak az egyetemi matematika alapképzésben. Az első fejezet első három leckéje szemléletes bevezetést nyújt a kalkulus alapjaival már megismerkedett hallgatónak, amit további 3 leckében az egzisztencia- és unicitástétel egy globális változatának kimondása és bizonyítása követ. A második és a harmadik fejezetbe különböző egyenletek megoldási módszerei kerültek. A negyedik fejezet a lineáris algebra alapjainak ismeretét feltételezve újratárgyalja a lineáris differenciálegyenletek témakörét. Az ötödik fejezet bizonyos közelítő eljárások bemutatásával előkészíti a numerikus módszerek használatát és megalapozza az egzisztencia- és unicitástételek összetettebb változatainak bizonyítását. A hatodik fejezet hiánypótló módon precízen tárgyalja a Laplace-transzformáció és az inverz Laplace-transzformáció tulajdonságait, majd a szokásos alkalmazásokat mutatja be.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy ezek az e-tananyagok azért készültek, hogy e-gyakorlófelülettel rendelkező, interaktív tananyagokként serkentsék a hallgatók önálló tanulási kedvét. Egy mindig elérhető, *használóikkal kommunikáló*, interaktív eszközök, melyek alapos felkészítéssel hozzásegíthetik rendszeres használóikat a matematika megértéséhez és szeretetéhez, ezzel együtt a sikeres vizsgához is. Az eddig elkészült e-tananyagok a magyar műszaki és gazdaságtudományi felsőoktatásban résztvevő BSc-s hallgatók matematika oktatásának eredményességét hivatottak javítani, lépést tartva a korrall és a mai igényekkel.